



TITLE:

# 内部平衡点の局所安定性における 考察: 同じヤコビアンをもつ微分方 程式と差分方程式について (第4回 生物数学の理論とその応用)

AUTHOR(S):

岩田, 繁英

---

CITATION:

岩田, 繁英. 内部平衡点の局所安定性における考察: 同じヤコビアンをもつ微分方程式と差分方程式について (第4回生物数学の理論とその応用). 数理解析研究所講究録 2008, 1597: 106-110

ISSUE DATE:

2008-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/81744>

RIGHT:

内部平衡点の局所安定性における考察

-同じヤコビアンをもつ微分方程式と差分方程式について-

The perspective about local stability of interior equilibrium point  
-on some types of Jacobian Matrix for difference or differential equations-

岩田 繁英 (Shigehide Iwata)

静岡大学創造科学技術大学院

Graduate School of Science and Technology, Shizuoka University.

概要

本研究ではヤコビアンの要素が似たタイプをもつ微分方程式と差分方程式の平衡点の安定条件の違いをヤコビアンの固有値の分布に注目して議論する。ヤコビアンは平衡点周りの安定性を解析する為の古典的な手法であり、すべての固有値の分布について左半平面、あるいは単位円に存在するかを判断する方法はある。しかし、方程式系の違いによる安定性の比較は余り行われてこなかった、つまり左半平面内部かつ単位円にすべての固有値が含まれるかどうかには余り注目されてこなかった。本研究では特定のヤコビアンの要素をもつ微分方程式、差分方程式の平衡点の安定性を固有値の分布を解析することで定性的な違いについて考察していく。結果として、特定のヤコビアンの形式では固有値が複素平面上の単位円内部または左半平面内部に分布する範囲は一つの条件で決定され差分方程式系と微分方程式系で平衡点の安定性が一致する状況と一致しない状況が明らかとなった。

## 1 導入

微分方程式や差分方程式は様々な分野で利用されている(例えば、種の個体群動態を記述するためや制御のために用いられる)。古典的な解析手法としてヤコビアンを計算しその固有値を計算することがある。固有値の分布から平衡点周りの安定性、結果として方程式の解の挙動が明らかになる。しかしながら、微分方程式また差分方程式の違いから起こる解の定性的性質の違いについて研究された例は少ない。本研究では方程式のヤコビアンの形式が同じであるとした場合、微分方程式系と差分方程式系で平衡点周りの安定性にはどのような違いが生まれるかを解析する。一般にヤコビアン  $J$  が与えられすべての固有値  $z$  が複素平面状の左半平面内部  $\text{Re}[z] < 0$ 、あるいは単位円  $|z| < 1$  に分布しているかを判定することは可能である。従来から知られている方法として、左半平面内の分布は Routh-Hurwitz の判定法 (Gantmacher, 1959)、単位円の場合は Schur-Cohn の判定法 (Marden, 1949) や Jury の判定法 (Jury, 1974) で明らかになる。ただし、これらの判定法を用い比較するには複雑な計算を行う必要があるために困難を伴う。そこで、本研究では同じタイプのヤコビアンをもつ微分方程式、差分方程式を仮定し固有値の分布について議論していく。本研究で取り扱うヤコビアンは Iwata et. al. (In press), Muko et. al. (2002) and Shigesada et. al. (1984) にみられるようなタイプである。Iwata et. al. (In press) ではロッターモデルに密度依存効果を加えたモデルを考えその解析で次の固有方程式を得た：

$$J_1(z) = \prod_{i=1}^n (-R_i D_i G_i) \begin{vmatrix} A_1(z) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & A_2(z) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & A_3(z) & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & A_n(z) \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

ここで  $z$  は固有値を表し,  $R_i > 0$ ,  $G_i > 0$ ,  $D_j > 0$  とする. (A1a) (Muko et. al., 2000, 2003) は生息地の違いを考慮したロッタリーモデルを考え解析の中で同じタイプの固有方程式を得た.

同様のタイプのヤコビアン行列は Shigesada et al. (1984) らによって Lotka-Volterra 方程式を解析する際にも得られている. Shigesada et al. (1984) の中で次のタイプの固有方程式を得ている:

$$J_2(z) = \prod_{i=1}^n (\sigma_i \beta_i x_i^*) \begin{vmatrix} B_1(z) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & B_2(z) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & B_3(z) & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & B_n(z) \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

ここで  $x_i^*$  は内部平衡点の値で,  $\sigma$  と  $\beta_i$  は正の定数で,  $z$  は固有値を示す. ここで重要な点は行列式の形式は類似しているという点である, つまり非対角成分は 1 であり対角成分は 1 でない. 行列式 (7) と (2) のような行列式はヤコビアン行列の性質からくるものであると考えられる. 本研究では最初にヤコビアン行列の各要素を仮定し, その固有値  $z$  が単位円内部に含まれる条件 (差分方程式である場合) と左半平面内部に含まれる条件 (微分方程式である場合) について解析していく. 最終的にその違いを論じる.

## 2 差分方程式と微分方程式の仮定

本研究では次の差分方程式と微分方程式を考える:

$$P_{i,t+1} = f_i(P_t)P_{i,t} \quad (3)$$

ここで  $P_t = (P_{1,t}, \dots, P_{n,t})$ .

$$x'_i = g(X)x_i \quad (4)$$

ここで  $X = (x_1, \dots, x_n)$ . 更に次の仮定を置く,

$$\frac{\partial f_i}{\partial P_k} = (f_i + D_{ii}^1)\Delta_{ik}^1 + R_i^1 G_k^1 \quad (\text{系 (3) について}) \quad (5)$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial P_k} = (g_i + D_{ii}^2)\Delta_{ik}^2 + R_i^2 G_k^2 \quad (\text{系 (4) について}) \quad (6)$$

ここで  $D_{ii}^1(P) < 0$ ,  $D_{ii}^2(X) < 0$ ,  $R_i^1(P) > 0$ ,  $R_i^2(X) > 0$ ,  $G_i^1(P) > 0$ ,  $G_i^2(X) > 0$  で  $\Delta_{ik}$  はクロネッカーデルタで  $\Delta_{ik} = 1$  ( $i = k$ ),  $0$  ( $i \neq k$ ) とする. このとき固有方程式は

$$J(z) = \prod_{i=1}^n (-R_i^1 G_i^1) \begin{vmatrix} C_1(z) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2(z) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & C_3(z) & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & C_n(z) \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

ここで  $C_i = (f_i + D_{ii}^1 - R_i^1 G_i^1 - z)/(R_i^1 G_i^1)$  である. 簡単のため固有方程式の計算は (5) の場合のみ考える ((6) の場合は上付きの添え字を 2 として  $f_i$  を  $g_i$  とすればよい. ).

### 3 ヤコビアンの計算結果

前節のように取り扱う方程式系について仮定をおくと、固有方程式 (7) の性質として次の結果を得る:

$$J(f_i + D_{ii}^1) = (-1)R_i^1 G_i^1 \prod_{j=1}^n \{(f_j + D_{jj}^1) - (f_1 + D_{11}^1)\} \quad (8)$$

$$J(m) = (-1)^n \left( \prod_{j=1}^n R_j^1 G_j^1 \right) \left( \prod_{j=1}^n \frac{m - (f_j + D_{jj}^1)}{R_j^1 G_j^1} \right) \left\{ 1 + \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{R_k^1 G_k^1}{m - (f_k + D_{kk}^1)} \right\} \quad (9)$$

内部平衡点を  $P^* = (P_1^*, \dots, P_n^*)$  ここで  $i > 0$  に対して  $P_i^* > 0$ ,  $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ , ここで  $i > 0$  に対して  $x_i^* > 0$  と定義する. 以後 \* が肩についている文字は内部平衡点の値を代入したものとする.

**定理 1.** 系 (3) において内部平衡点  $P^*$  が存在し, すべての  $i > 0$  に対して  $-2 < D_{ii}^{1*} < 0$  と仮定する. すると次の条件を満たせば内部平衡点は局所安定となる.

$$1 + \sum_{j=1}^n (-1)^{n-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{R_k^{1*} G_k^{1*}}{2 + D_{kk}^{1*}} > 0 \quad (10)$$

**証明.**  $D_{11}^{1*} < \dots < D_{nn}^{1*}$  を仮定する. 内部平衡点では  $f_i = 1$  であるので式 (8) から

$$J(1 + D_{11}^{1*}) < 0, J(1 + D_{22}^{1*}) > 0, \dots, (-1)^n J(1 + D_{nn}^{1*}) > 0.$$

故に  $n-1$  個の固有値は开区間  $(1 + D_{11}^{1*}, 1 + D_{nn}^{1*})$  に分布する事がわかる. ここで式 (9) より  $m = -1$  とすると

$$J(-1) = \left( \prod_{j=1}^n R_j^{1*} G_j^{1*} \right) \left( \prod_{j=1}^n \frac{2 + D_{jj}^{1*}}{R_j^{1*} G_j^{1*}} \right) \left\{ 1 + \sum_{j=1}^n (-1)^{n-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{R_k^{1*} G_k^{1*}}{2 + D_{kk}^{1*}} \right\}$$

をえる. ここですべての  $i > 0$  に対して  $-2 < D_{ii}^{1*} < 0$  であるので (10) が成立すれば  $J(-1) > 0$  である事がわかる. つまり残された平衡点は开区間  $(-1, 1 + D_{11}^{1*})$  に存在することがわかる.  $\square$

**定理 2.** (4) において内部平衡点  $P^* = (P_1^*, \dots, P_n^*)$  が存在すること, 任意の  $i > 0$  について  $D_{ii}^{2*} < 0$  と  $-a < D_{ii}^{2*} < 0$  を満たす任意の正の定数  $a$  を仮定する. すると次の条件を満たせば内部平衡点は局所安定となる.

$$1 + \sum_{j=1}^n (-1)^{n-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{R_k^{2*} G_k^{2*}}{a + D_{kk}^{2*}} > 0 \quad (11)$$

証明.  $D_{11}^{2*} < \dots < D_{nn}^{2*}$  を仮定する. 内部平衡点では  $g_i = 0$  であるので式 (8) (肩についている添え字を 2 とし  $f_i$  を  $g_i$  と読み替える) から

$$J(D_{11}^{2*}) < 0, J(D_{22}^{2*}) > 0, \dots, (-1)^n J(D_{nn}^{2*}) > 0.$$

故に  $n-1$  個の固有値は开区間  $(D_{11}^{2*}, D_{nn}^{2*})$  に分布する事がわかる. ここで式 (9) (肩についている添え字を 2 とし  $f_i$  を  $g_i$  と読み替える) より  $m = -a$ ,  $(0 > D_{11}^{2*} > -a)$  とすると

$$J(-a) = \left( \prod_{j=1}^n R_j^2 G_j^2 \right) \left( \prod_{j=1}^n \frac{a + D_{jj}^{2*}}{R_j^2 G_j^2} \right) \left\{ 1 + \sum_{j=1}^n (-1)^{n-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{R_k^2 G_k^2}{a + D_{kk}^{2*}} \right\}$$

をえる. ここですべての  $i > 0$  に対して  $-2 < D_{ii}^{2*} < 0$  であるので (10) が成立すれば  $J(-1) > 0$  である事がわかる. つまり残された平衡点は开区間  $(-a, D_{11}^{2*})$  に存在することがわかる.  $\square$

#### 4 議論

これまでみてきたようにヤコビアン要素が式 (5) (差分方程式の系) 又は式 (6) (微分方程式の系) で記述されている場合の内部平衡点の安定条件を得た. 更にこの条件は平衡点の値に依存して包含関係が決定される. つまり,  $a$  が 2 よりも大きい値あるいは小さい値をとることができるかという観点で議論ができる ( $-a < D_{11}^{2*} < \dots < D_{nn}^{2*}$  という順序であるので  $a$  は  $D_{11}^{2*}$  に依存して決定される). (11) で  $a = 2$  とすれば (12) と条件は一致するために, 微分方程式系だとしても差分方程式系だとしても内部平衡点が存在すればその平衡点の安定性は同じ条件下で一致することが分かる.  $a < 2$  の時, 差分方程式系の平衡点が安定であればそれに対応する微分方程式系の平衡点も安定であると言える. 一方,  $a > 2$  である時は, 微分方程式系の平衡点が安定であるからといってそれに対応する差分方程式系の平衡点が安定であるとは限らない. ここで 2 次元の場合の安定性条件を Jury の判定法と Routh-Hurwitz の判定法を用いてこの条件を比較してみる. 2 次元で Jury の判定法を用いると下記の条件が二つの固有値は単位円に含まれる必要十分条件である.

$$1 + \text{tr} + \text{det} > 0, 1 - \text{tr} + \text{det} > 0, \text{det} < 1 \quad (12)$$

ここで  $\text{tr}$  はヤコビアンのトレース,  $\text{det}$  はヤコビアンの行列式を示す. 一方, 2 次元で Routh-Hurwitz の判定法を用いると下記の条件が二つの固有値が複素平面の左半平面内部に含まれる条件となる,

$$\text{tr} < 0, \text{det} > 0. \quad (13)$$

これらの条件は必要十分条件であるので条件 (10) (または (11)) は条件 (12) (または (13)) を満たす. 今回  $a = 2$  である場合は条件 (12) かつ (13) を満たす場合であり, 図 1 でみれば (c) の太線内部に含まれる条件であるといえる. 一方で, (a) (または (b)) の太線内部は条件 (10) (または (11)) を含む条件である. これまでみてきたように微分方程式系と差分方程式系の違いがあってもヤコビアン要素が (5) または (6) のタイプであればその平衡点の安定性は条件 (10), (11) により決定される. そして, 平衡点の値に依存してそれぞれの系に対応する平衡点の安定性は一致したり異なったりする. ここで, Jury の判定法や Routh-Hurwitz の判定法のような複雑な計算を必

要としないことが (5) または (6) のタイプのよさであるといえる。今後の課題としてはより一般的に微分方程式でも差分方程式でも同じタイプのヤコビアンを持てばすべての固有値が単位円内部かつ左半平面にある条件を複雑な計算をせずに見つけることができる条件を求めることである。特に今回の解析では  $n$  次固有方程式が  $n$  個の実根を持つ場合のみを対象としていたため、固有方程式の根が複素数となる場合についての解析も同様に行う必要がある。

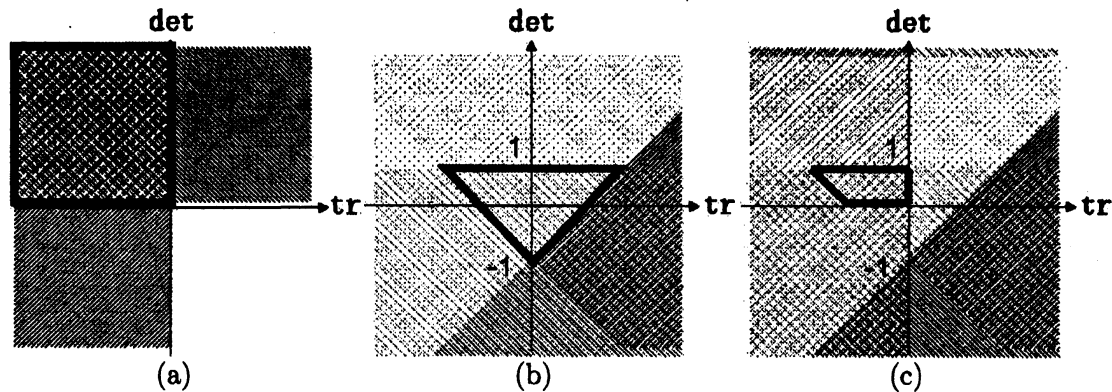


図 1: 2次元のヤコビアン行列式とトレースに対して安定である条件を示した図。(a) すべての固有値が単位円内部に含まれる領域が太線内部 (斜線部の領域は (12) の不等式それぞれをみたす領域), (b) すべての固有値が左半平面内部に含まれる領域が太線内部 (斜線部の領域は (13) の不等式それぞれをみたす領域) そして (c) が単位円内部かつ左半平面内部に含まれる領域を示している。

## 参考文献

- [1] Gantmacher, F. R., 1959. The theory of Matrices, 2, Chelsea.
- [2] Shigesada, N., K. Kawasaki and E. Teramoto, 1984. The effects of interference competition on stability, structure and invasion of a multi-species system. J. Math. Biol., 21: 97-113.
- [3] Iwata, S, R. Kon and Y. Takeuchi, The density dependence in the settlement of seeds promotes species coexistence in lottery competition models. Ecol. Model., (In press). Jury, E. I., 1974. Inners and Stability of Dynamic Systems, John Wiley & Sons, Inc., New York. 児玉慎三, 須田信夫著, 1978 システム制御のためのマトリクス理論. 計測自動制御学会.
- [4] Marden, 1949. The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable, AMS, New York.
- [5] Muko, S. and Y. Iwasa, 2000. Species coexistence by permanent spatial heterogeneity in a lottery model, Theor. Popul. Biol., 57: 273-284.
- [6] Muko, S. and Y. Iwasa, 2003. Incomplete mixing promotes species coexistence in a lottery model with permanent model with permanent spatial heterogeneity. Theor. Popul. Biol., 64: 359-368.